

**F - 3690****B.Sc. (Part - II) Examination, 2022****(Old/New Course)****MATHEMATICS****Paper Third****(Mechanics)***Time : Three Hours]**[Maximum Marks:50*

नोट: प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Note: Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.**

**इकाई - 1/Unit - 1**

1. (A) दो बराबर भार P और P दो डोरियों ACP और BCP से बंधे हुए हैं जो एक चिकनी खूँटी C के ऊपर होकर जाती हैं। AB एक भारी दण्ड है जिसका भार W है और जिसका गुरुत्व केन्द्र A से a फीट और B से b फीट है। दर्शाइये कि AB क्षैतिज से

कोण  $\tan^{-1} \left[ \frac{a-b}{a+b} \tan \left( \sin^{-1} \frac{W}{2P} \right) \right]$  बनाती है।

Equal weights P and P are attached to two strings ACP and BCP passing over a smooth peg C. AB is a heavy beam of weight W, whose centre of gravity is a feet from A, b feet from B; show that AB is inclined to

the horizon at an angle  $\tan^{-1} \left[ \frac{a-b}{a+b} \tan \left( \sin^{-1} \frac{W}{2P} \right) \right]$

(B) लम्बाई 2a के एक एकसमान दण्ड के सिरे दो चिकने समतलों पर रखे हुए हैं जो एक क्षैतिज रेखा में प्रतिच्छेद करते हैं। यदि क्षैतिज से समतलों के झुकाव  $\alpha$  और  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ) हों, तो दर्शाइये कि किसी एक साम्यावस्था की स्थिति में दण्ड का क्षैतिज

से झुकाव  $\theta$ ,  $\tan \theta = \frac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha)$  से दिया जाता है और दर्शाइये कि इस स्थिति में दण्ड अस्थायी है।

A uniform beam of length 2a rests with its ends on two smooth planes which intersect in a horizontal line. If the inclinations of the planes to the horizontal are  $\alpha$  and  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ), show that the inclination  $\theta$  of the beam to the horizontal in one of the equilibrium posi-

[3]

tion is given by  $\tan \theta = \frac{1}{2}(\cot \beta - \cot \alpha)$  and show that

the beam is unstable in this position.

(C) दो बराबर एक समान छड़ें AB और AC, प्रत्येक की लम्बाई  $2b$  है, A पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुए हैं और त्रिज्या  $a$  के एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त पर विराम में हैं। दर्शाइये कि यदि उनके बीच का कोण  $2\theta$  हो तो  $b\sin^3 \theta = a \cos \theta$

Two equal uniform rods AB and AC, each of length  $2b$ , are freely joined at A and rest on a smooth vertical circle of radius  $a$ . Show that if  $2\theta$  be the angle between them, then  $b\sin^3 \theta = a \cos \theta$

### इकाई - 2/Unit - 2

2. (A) किसी दिये गये बल-निकाय के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the central axis of any given system of forces.

- (B) तीन बल सरल रेखाओं

$x = 0, y - z = a; y = 0, z - x = a; z = 0, x - y = a$  के अनुदिश क्रिया करते हैं। दर्शाइये वे एक बलयुग्म में

[4]

समानीत नहीं हो सकते।

Three forces act along the straight lines

$x = 0, y - z = a; y = 0, z - x = a; z = 0, x - y = a$

show that they cannot reduce to a couple.

- (C) किसी दिये हुए समतल के लिये शून्य विकल्प स्थिति प्राप्त कीजिये।

Find the null point of a given plane.

### इकाई - 3/Unit - 3

3. (A) आयाम  $a$  तथा आवर्तकाल  $T$  की सरल आवर्त गति में, दर्शाइये कि केन्द्र से  $x$  दूरी पर वेग  $v$  निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा दिया जाता है:  $v^2 T^2 = 4\pi(a^2 - x^2)$

Show that in a simple harmonic motion of amplitude  $a$  and period  $T$ , the velocity  $v$  at a distance  $x$  from the centre is given by the relation.  $v^2 T^2 = 4\pi(a^2 - x^2)$

- (B) एक कण एक समान कोणिक सर्पिल  $r = ae^\theta$  पर इस प्रकार गतिमान है कि इसका त्वरण त्रिज्य त्वरण नहीं रखता है, तो सिद्ध कीजिये कि कोणीय वेग अचर है तथा वेग का मान तथा त्वरण  $r$  के समानुपाती हैं।

[5]

A particle describes on equiangular spiral  $r = ae^\theta$  in such a manner that its acceleration has no radial component. Prove that its angular velocity is constant and that magnitude of the velocity and acceleration is each proportional to  $r$ .

(C) एक कण एक समतल में एक त्वरण, जो समतल में सदैव एक निश्चित बिन्दु की ओर दिष्ट है के अन्तर्गत गति करता है। पथ का ध्रुवीय रूप में अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

A particle moves in a plane with an acceleration which is always directed to a fixed point O in the plane; Find the differential equation of its path in polar form.

#### इकाई - 4/Unit - 4

4. (A) एक कण नाभि की ओर दिष्ट एक बल  $\frac{\mu}{(\text{दूरी})^2}$  के

अन्तर्गत एक दीर्घवृत्त निर्मित करता है। यदि यह बल केन्द्र से दूरी  $r$  पर एक बिन्दु से वेग  $v$  से प्रक्षिप्त किया गया था, तो दर्शाइये कि इसका आवर्तकाल है:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right)^{-3/2}$$

[6]

A particle describes an ellipse under a force  $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$  towards the focus. If it was projected with velocity  $V$  from a point distance  $r$  from the centre of

force, show that its periodic time is  $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right)^{-3/2}$

(B) एक ग्रह, जिसका द्रव्यमान  $M$  तथा आवर्तकाल  $T$  है, जब सूर्य से महत्तम दूरी पर होता है तो  $m$  द्रव्यमान की एक उल्कापात, जो वेग  $v$  से विपरीत दिशा में उसी कक्ष में गतिमान है, से

टकराता है, यदि  $\frac{m}{M}$  छोटा है, तो दर्शाइये कि ग्रह के पथ की

दीर्घाक्ष  $\frac{4m v T}{M \pi} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$  से लघ्वीकृत हो जाती है।

A planet, of mass  $M$  and periodic time  $T$ , where at its greatest distance from the sun comes into collision with a meteor of mass  $m$ , moving in the same orbit in

the opposite direction with velocity  $v$ ; if  $\frac{m}{M}$  be small,

show that the major axis of the planet's path is reduced

[7]

$$\text{by } \frac{4m vT}{M \pi} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

(C) एक कण एक समतल वक्र पर गतिमान है। यदि स्पर्श रेखीय और अभिलाम्बिक त्वरण सदैव अचर रहते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि कोण  $\psi$ , जो गति की दिशा समय में घूमती है, समीकरण  $\psi = A \log(1 + Bt)$  द्वारा निर्धारित होता है।

A particle is describing a plane curve. If the tangential and normal accelerations are each constant throughout the motion, prove that the angle  $\psi$ , through which the direction of motion turns in time  $t$  is given by

$$\psi = A \log(1 + Bt)$$

### इकाई - 5/Unit - 5

5. (A) कोई कण ऊर्ध्वाधरतः गुरुत्व (अचर) के अन्तर्गत एक अवरोधी माध्यम, जिसका अवरोध वेग के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है, में ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। कण की गति ज्ञात कीजिए।

A particle is projected upwards under gravity (constant) in a resisting medium whose resistance varies as the square of the velocity. Find the motion.

- (B) गुरुत्वीय आकर्षण में  $m$  संहति का एक कण ऊर्ध्वाधरतः

[8]

ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है, वायु का अवरोध वेग का  $mk$  गुणा है। यदि  $V$  सीमान्त वेग तथा  $\lambda V$  प्रारम्भिक वेग है तो दर्शाइये कि कण द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई

$$\frac{V^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)] \text{ हैं।}$$

A particle of mass  $m$  is projected vertically upwards under gravity, the resistance of the air being  $mk$  times the velocity. Show that the greatest height attained by

$$\text{the particle } \frac{V^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)]$$

Where  $V$  is the terminal velocity of the particle and  $\lambda V$  is the initial velocity.

- (C) बेलनीय निर्देशांक के पदों में किसी कण का त्वरण ज्ञात कीजिए।

Find the acceleration of a particle in terms of cylindrical coordinates.